Modos Inerciais no Núcleo Terrestre Determinados pela Equação de Poincaré

Luiz Gabriel Souza de Oliveira, Natália Valadares de Oliveira – Departamento de Ciências Naturais/UFES

Abstract

The aim of this work is to present the application of the Poincaré equation in determination of the frequencies of inertial modes arising from complex rotational dynamics of the earth's outer core. From the application of recursive techniques in spherical harmonics functions, frequency values of low-grade retrograde modes were determined. The results are consistent with theoretical and experimental studies presents in the literature.

Introdução

Responsável pela origem e manutenção do campo geomagnético, através da ação do mecanismo do dínamo terrestre, o núcleo externo da Terra é limitado pelas camadas sólidas representadas pelo manto e pelo núcleo interno (Melchior 1986).

Dada a natureza da dinâmica de fluidos em regime de turbulência, diversos tipos de escoamentos podem ser determinados a partir de modelos computacionais e da observação sobre as características de variação temporal do campo de gravidade por meio da gravimetria de supercondutividade (Melchior & Ducarme 1986).

Neste contexto, a presença de ondas inerciais ocorre como uma possibilidade concreta, influenciada pelos efeitos de rotação do planeta somados a possível estratificação composicional do núcleo externo, causada pela presença de elementos leves e pelo regime termal presente.

Um dos primeiros estudos sobre a dinâmica de um fluido incompressível uniforme em recipiente com paredes rígidas e sem a presença de um corpo interno é atribuído a Poincaré (1885). Este trabalho fundamental teve rápido desenvolvimento, como posteriormente apresentado em trabalhos de natureza teórica (Greenspan 1969) quanto experimental (Aldridge 1975).

Sendo assim, o objetivo deste trabalho é discutir a natureza da denominada equação de Poincaré e sua aplicação na determinação das frequências dos modos inerciais ocorrentes no núcleo externo terrstre.

A Equação de Poincaré

Adotando um sistema de coordenadas eulerianas em rotação, a equação de movimento para um fluido incompressível contido numa cavidade esférica é escrita como (Melchior 1986):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla\,\vec{v})+2\vec{\Omega}\times\vec{v}=-\nabla\,p \tag{1}$$

sendo a $\vec{v}$ velocidade, $2\vec{\Omega}\times\vec{v}$ a acelereção de Coriolis e *p* a pressão reduzida, definida a partir da perturbação na pressão P, com densidade de referência e potencial centrífugo w, pela relação

$$p=\frac{P}{\rho}+w \tag{2}$$

Com base na condição newtoniana da viscosidade dinâmica para o fluido incompressível em rotação, é obtida a equação de Navier-Stokes na forma

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}+2\vec{\Omega}\times\vec{v}=-\nabla\,p-\nu\nabla\times(\nabla\times\vec{v}) \tag{3}$$

com ν configurando a viscosidade cinemática. Na sua forma adimensional, a mesma pode ser expressa como

$$(\frac{\partial}{\partial t}+Ro\,\vec{v}\cdot\nabla)+2\,\hat{k}\times\vec{v}=E\nabla^2\vec{v}-\nabla\,p \tag{4}$$

]

com *Ro* e *E* definindo os números adimensionais de Rossby e Ekman.

Se a condição de pequenas perturbações em relação a um estado de configuração inicial do sistema for assumida, os termos não-lineares podem ser negligenciados. Como consequências desta abordagem:

I) possível perda de ressonância causada pelo termo advectivo;

ii) reversibilidade de fluxos secundários associados às camadas limite (inexistência dos termos quadráticos);

iii) dada a natureza algébrica das soluções associdas (exponencial), a possibilidade de expressão das mesmas por meio de harmônicos esféricos.

Dada as características do problema estudado por Poincaré (1885), considera-se que o gradiente de pressão é suficiente para sustentar modos oscilatórios. Sendo assim, é plausível formular o problema apenas em termos da pressão (Friedlander & Seiemann 1982).

Assumindo que o campo de velocidades é senoidal $(\nabla \cdot \vec{v} = 0)$, a equação (3) pode ser modificada na denominada equação de Greenspan:

$$\left(\nu \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla^2 p + 4\Omega^2 \left(\nu^2 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right) = 0 \tag{5}$$

Com base na hipótese de um fluido perfeitamente incompressível, obtemos

$$4\Omega^2 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 p = 0 \tag{6}$$

Se as soluções são do tipo $p = p_0 \exp(i\omega t)$, temos então a denominada *equação de Poincaré*

$$\nabla^2 p - \frac{4\Omega^2}{\omega_i} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \tag{7}$$

Neste cenário, pequenas perturbações de uma configuração de equilíbrio podem se propagar ao longo do fluido contido na cavidade na forma de ondas inerciais, que são controladas pela força de Coriolis.

A equação de Poincaré adequa-se ao estudo deste tipo de fenômeno oscilatório no núcleo externo terrestre, uma vez que modos inerciais podem podem existir com uma frequência menor que o dobro da frequência de rotação do planeta.

Dada a natureza hiperbólica da equação, é conhecida a dificuldade e caráter dúbio das soluções para este tipo de problema. Não é conhecida teoremas de unicidade para estes casos (Stewartson & Roberts 1963, Aldridge 1972). Porém, estudos de Aldridge (1975) demonstraram experimentalmente que soluções existem em certas condições discretas, configurando um problema clássico de autovalores e autovetores.

Solução analítica da equação de Poincaré

Aplicando um sistema de coordenadas cilíndricas (*θ, z, Λ*) e a condição de linearização, é de interesse soluções do tipo $p = p(\rho, z)\exp(im\Lambda)\exp(i\omega_i t)$, com *m* sendo o número de onda azimutal. Assumindo a transformação do sistema de coordenadas, a equação de Poincaré pode ser escrita como (Melchior 1986):

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\theta \frac{\partial p}{\partial \theta}\right) - \frac{m^2}{\theta^2} p + \left(1 - \frac{4}{\lambda^2}\right)\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \tag{8}$$

com a condição de contorno

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{2m}{\lambda} p + \left(1 - \frac{4}{\lambda^2}\right) z \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \tag{9}$$

na esfera $r^2 = \rho^2 + z^2 = 1$.

As soluções neste caso representam oscilações inerciais numa esfera. Admitindo *m = 0* e com

$$\begin{gathered} p = p(\theta, z)\exp(i\omega_i t) \\ U(r,z) = \frac{\partial p}{\theta \partial z}\exp(i\omega_i t) \\ W(r,z) = \frac{\partial p}{\theta \partial \theta}\exp(i\omega_i t) \end{gathered} \tag{10}$$

a equação de Poincaré torna-se

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\theta \frac{\partial p}{\partial \theta}\right) - \gamma^2 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \tag{11}$$

com

$$\gamma^2 = -\left(1 - \frac{4}{\lambda^2}\right) = \frac{4\Omega^2}{\omega_i^2} \tag{12}$$

e *p = 0* nos limites.

Smylie (2013) apresentou um procedimento baseado em relações de recorrência na solução da chamada equação secular, que possui vínculo direto com a equação de Poincaré.

Como discutido pelo autor supracitado, a equação de Poincaré pode ser expressa em termos da relação

$$\frac{\partial^2 p}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial Y^2}+\left(1-\frac{1}{\sigma^2}\right)\frac{\partial^2 p}{\partial Z^2}=0 \qquad (13)$$

num sistema de coordenadas cartesianas, com o eixo *z* associado ao eixo de rotação terrestre e contendo a *frequência de Coriolis* $\sigma=\omega/2\Omega$.

Assim, por meio de um algoritmo computacional, é possível determinar o valor do período (ou frequência) associado a cada modo de oscilação de grau *n*, número azimutal *m* resolvendo-se

$$\left(1-\xi_0{}^2\right)\frac{d\,P_n^m(\xi_0)}{d\xi_0}=m\frac{\xi_0}{\sigma}P_n^m(\xi_0) \qquad (14)$$

com

$$\xi_0=\sigma\left(\frac{1-e^2}{1-e^2\sigma^2}\right)^{(1/2)} \qquad (15)$$

sendo *e* a excentricidade da cavidade esferoidal em questão (no caso, o núcleo externo).

Períodos de alguns modos inerciais fundamentais

Com base no algoritmo computacional apresentado por Smylie (2013), foram determinados os períodos siderais e as frequências de Coriolis de alguns modos inerciais investigados experimentalmente (Figura 1) por Aldridge *et al.* (1989).

Foram adotadas as densidades do moldelo de referência PREM, assumindo um achatamento (*flattening*) de 1/392,470 para a região do limite manto-núcleo (*core-mantle boundary – CMB*)..

Os resultados são apresentados na tabela abaixo.

MODO (n,m,k)	Frequência de Coriolis	Período Sideral (h)
2,1,1	1,0000	12,0000
4,2,1	0,6171	19,4459
3,1,1	1,3501	8,8880
4,1,1	0,8546	14,0411

Os parâmetros calculados de cada modo estão estão próximos aos determinados experimentalmente por Aldridge *et al.* (1989) e os valores numéricos e experimentais apresentados por Greenspan (1968).

Modos Inerciais e a Física do Núcleo Externo

As soluções da equação de Poincaré de fato tem mostrado que fluidos confinados em cavidades esféricas são capazes de gerar uma gama de modos oscilatórios com períodos maiores que 12 horas siderais (Smylie 2013), na maioria dos casos.

É fato que a informação sismológica combinada a modelos termodinâmicos e mineralógicos teóricos aponta para uma situação de estratificação composicional do núcleo externo, oriunda do processo de resfriamento/cristalização do núcleo interno.

Sob esta ótica, é necessária a introdução de um parâmetro que quantifique este fato e que seja passível de introdução numa possível formulação de solução da equação de Poincaré. Assim, define-se a frequência de Brunt-Väisälä *N* (Melchior 1986) por

$$N^2(r)=-g(r)\,\rho^{-1}(r)\frac{d\rho(r)}{dr}-g^2(r)\,\rho(r)\,k^{-1}(r) \qquad (16)$$

que é determinada em função da aceleração gravitacional *g*, densidade *ρ* e incompressibilidade *k*.

Como é possível verificar, se $N^2(r)>0$, a estratificação é estável (se uma partícula do meio é deslocada, ela tendem a retornar a sua posição original por meio de oscilações. Com $N^2(r)<0$, a estratificação é instável (se uma partícula é deslocada, ela continua se afastando de sua posição original. Já se $N^2(r)=0$, a estratificação é neutra (se uma partícula é deslocada, esta será sua nova posição).

Em termos físicos, estratificações estáveis inibem movimentos radiais, mas não modos toroidais. Já estratificações instáveis, modos poloidais podem ocorrer, sendo excitados por forças de flutuabilidade.

Associando estas idéias a frequência de oscilação das ondas presentes no núcleo externo, temos duas situações fundamentais:

i) se $\omega_i < N$, as soluções estão associadas ao aparecimento de ondas progressivas;

ii) se $\omega_i > N$, os distúrbios são estacionários e tendem a decair com o tempo.

Portanto, o conhecimento do perfil da frequência Brunt-Väisälä é de fundamental importância para o entendimento e determinação do aparecimento ou não dos modos inerciais no núcleo terrestre.

Uma evolução natural deste estudo seria levar em consideração as alterações na densidade do material (decorrente da estratificação composicional) bem como resolver a referida equação num contexto de compressibilidade dos materiais.

Conclusões

Neste trabalho foi apresentada uma técnica de detrminação teórica das frequências dos modos inerciais presentes no núcleo externo, que são decorrentes da interação dos mecanismos de transporte de calor e massa com a dinâmica rotacional do planeta.

O conhecimento destes fenômenos é de fundamental importância para o entendimento dos mecanismos e processos de origem e evolução do núcleo terrestre.

Outro aspecto interessante é a possibilidade de estudar o efeito dos modos inerciais na rotação do planeta (Dehant & Mathews 2015), visto que algumas soluções apresentam frequência próxima a frqusência de rotação do planeta. Assim, os processos de nutação podem ser influenciados pela presença das oscilações inerciais.

Agradecimentos

Ao Dr. Douglas Smylie (*York University*) pelas discussões sobre modos inerciais e a equação de Poincaré. Ao Departamento de Ciências Naturais pela infraestrutura computacional.

References

Aldridge, K.D., 1972, Axisymmetric inertial oscillations of a fluid in a rotating spherical shell: Mathematika, Vol. 19, p163-168.

Aldridge, K.D., 1975, Inertial waves and the Earth's outer core: Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, Vol. 42, p337-345.

Aldridge, K.D., Lumb, L.I., Henderson, G.A., 1989, A Poincaré model for the earth's fluid core: Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, Vol. 48, p5-23.

Dehant, V., Mathews, P.M., 2015**,** Precession, Natation and Wobble of the Earth, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Friedlander, S., Siegmann, W.L.., 1982, Internal waves in a rotating stratified fluid in an arbitrary gravitational field: Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, Vol. 19, p267-291.

Greenspan, H.P., 1969, The Theory of Rotating Fluids. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Melchior, P., 1986, The Physics of The Earth's Core, Pergamon Press, Oxford, UK.

Melchior, P., Ducarme, B., 1986, Detection of inertial gravity oscillations in the Earth's core with a superconducting gravimeter at Brussels: Physics of the Earth and Planetary Interiors, Vol. 42, p129-134.

Poincaré, H., 1885, Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation: Acta Mathematica, Vol. 7, p259-380.

Smylie, D.E., 2013, Earth Dynamics – Deformations and Oscillations of the Rotating Earth, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Stewartson, K., Roberts, P.H., 1963, On the motion of a liquid in a spheroidal cavity of a precessing rigid body: Journal of Fluid Mechanics, Vol. 17, p1-20**.**

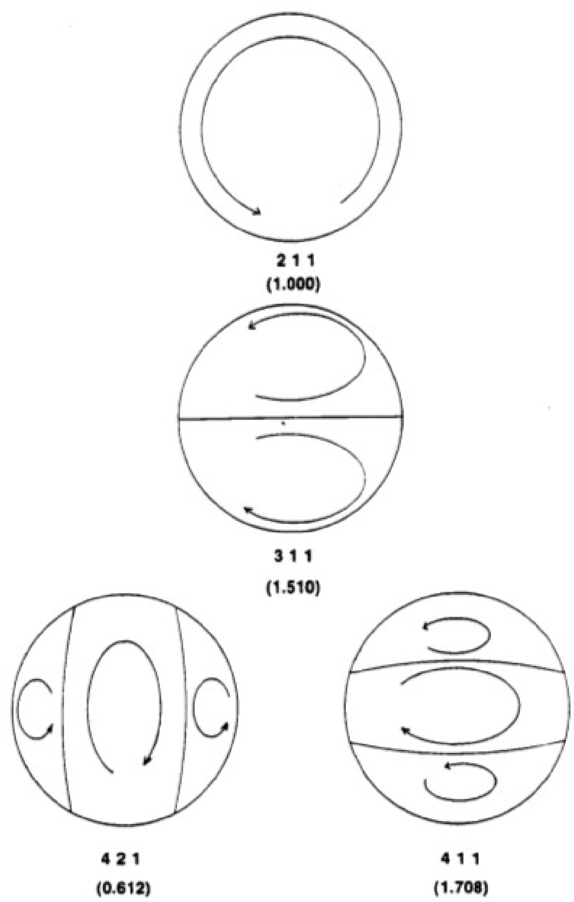

Figura 1 – Representação esquemática de alguns modos inerciais de oscilação observados experimentalmente. Os índices (n,m,k) referem-se à identificação de cada modo e o número entre parênteses a frequência de Coriolis. Extraído de Aldridge *et al.* (1989).